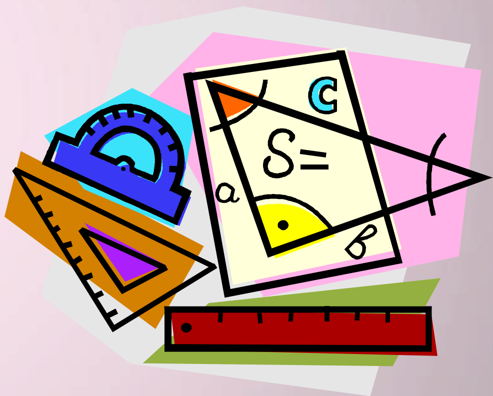
GEOMETRIA EUCLIDEA

- Realizzato dall'alunna: PARIMBELLI ILARIA
- classe 1Ap

ISIS EINAUDI Dalmine



Ilary

INDICE DELLE UNITA'

Ilary

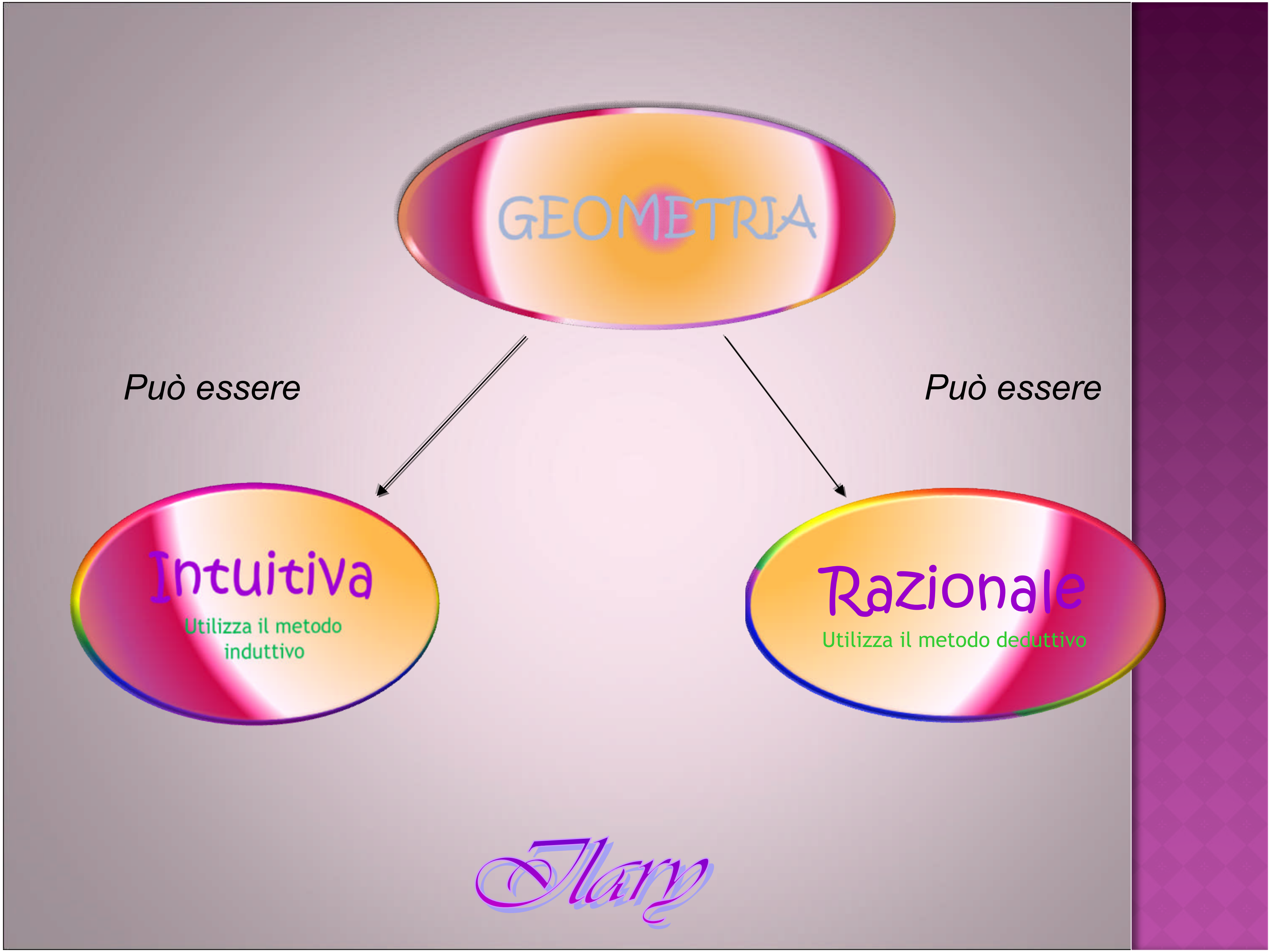
UNITA' 1

Piano euclideo

Ilary

- Metodo deduttivo
- Metodo induttivo
- Ragionamento induttivo
- Ragionamento deduttivo
- I primi assiomi della geometria euclidea
- Angoli particolari
- Angoli consecutivi
- Angoli adiacenti
- Angoli opposti al vertice
- Poligonale
- Poligonale chiusa, aperta e intrecciata
- Poligono

Ilary


GEOMETRIA
Può essere
Può essere
Intuitiva
Utilizza il metodo induttivo
Razionale
Utilizza il metodo deduttivo
Ilary

METODO DEDUTTIVO

Geometria Razionale
Parte da:

Concetti primitivi

Assiomi

Ilary

METODO INDUTTIVO

intuitiva

Si basa su

Osservazioni

Prove

Tentativi

Ilary

RAGIONAMENTO INDUTTIVO

- Osserva le somme di alcune terne di numeri naturali consecutivi

0+1+2=3

1+2+3=6

2+3+4=9

3+4+5=12

- Si osserva che i numeri ottenuti sono multipli di 3, possiamo quindi ipotizzare che le successive somme di terne di numeri consecutivi sono 15, 18, 21, 24, ecc.

Ilary

RAGIONAMENTO DEDUTTIVO

- Indichiamo con n un generico numero naturale. I due numeri naturali a esso consecutivi potranno essere indicati con n+1 e n+2 quindi la somma dei tre numeri è data da:

$$n + (n+1)+(n+2)=n+n+1+n+2=3n+3=3(n+1)$$

Quindi abbiamo dimostrato che la somma di tre numeri consecutivi è un multiplo di 3.

Ilary

DALLA GEOMETRIA INTUITIVA

ALLA GEOMETRIA RAZIONALE

Ilary

CONCETTI O ENTI PRIMITIVI:
ENTI CHE NON DEFINIAMO ESPLICITAMENTE

Assiomi o postulati :

Proprietà che "supponiamo" essere vere e che pertanto non dimostriamo

Ilary

2.1 I PRIMI ASSIOMI DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA

Concetti primitivi

assiomi

Mediante definizioni

Mediante dimostrazioni

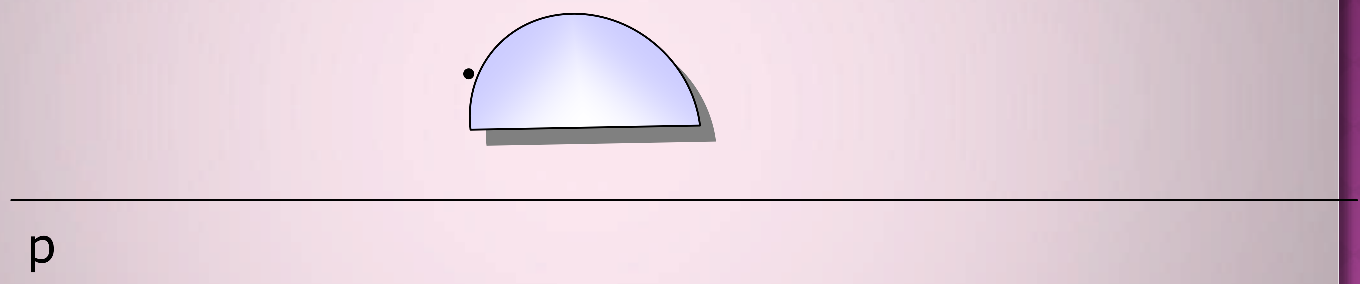
Nuovi enti

Ilary

Nuove proprietà (teoremi)

ANGOLI PARTICOLARI

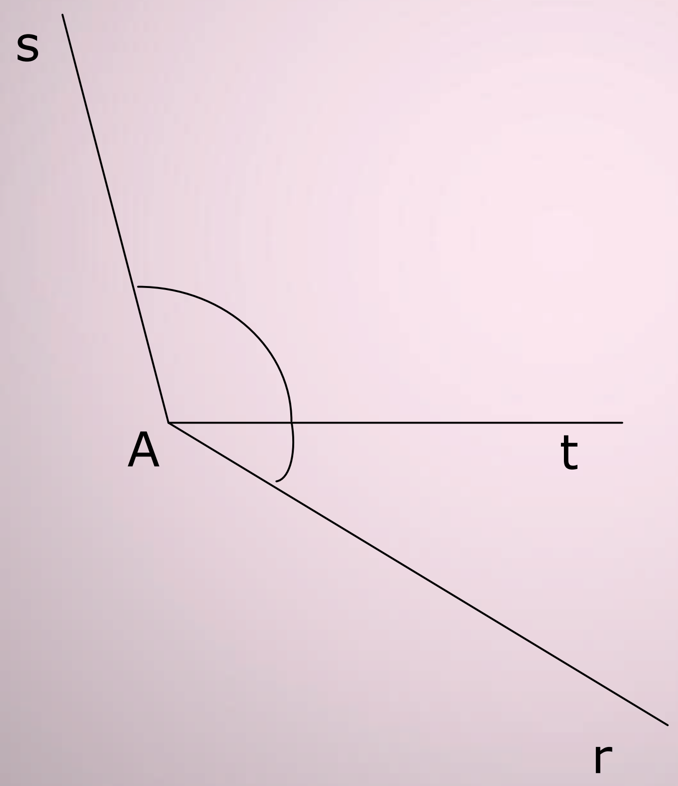
- Angolo PIATTO: un lato è il prolungamento dell’altro (180°)



- Angolo GIRO: i due lati sono sovrapposti (360°)

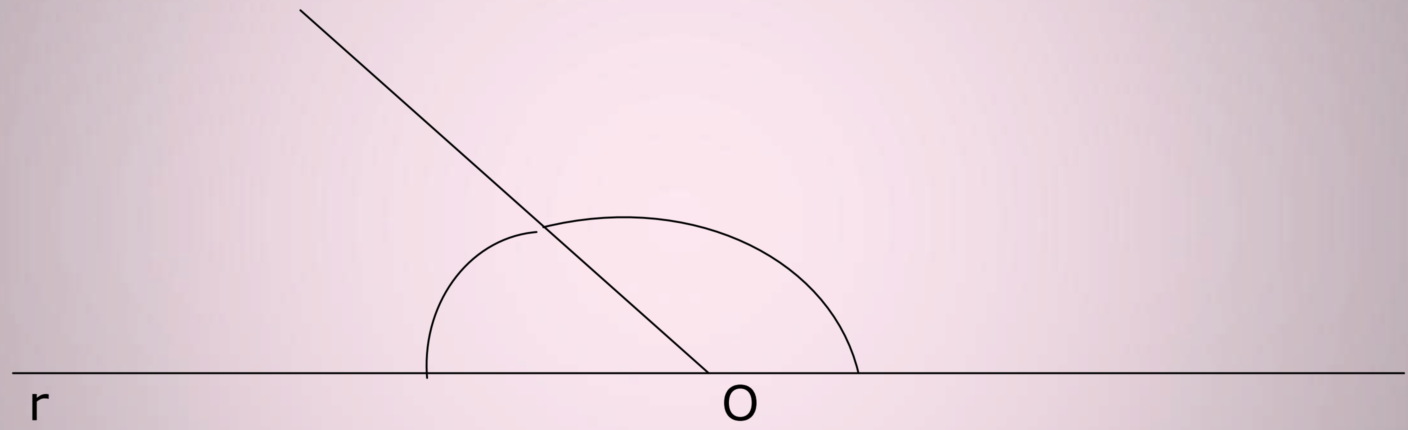
Ilary

ANGOLI CONSECUTIVI:
DUE ANGOLI AVENTI IN COMUNE IL VERTICE, UN LATO E NESSUN ALTRO PUNTO



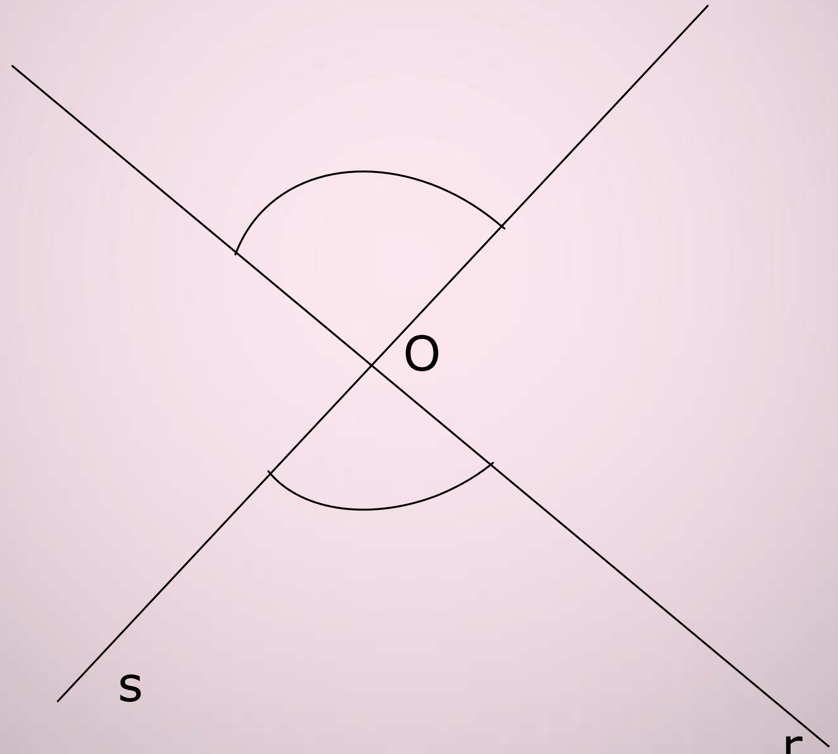
Ilary

ANGOLI ADIACENTI:
DUE ANGOLI CHE OLTRE AD ESSERE CONSECUTIVI HANNO I DUE LATI NON COMUNI L'UNO IL PROLUNGAMENTO DELL'ALTRO



Ilary

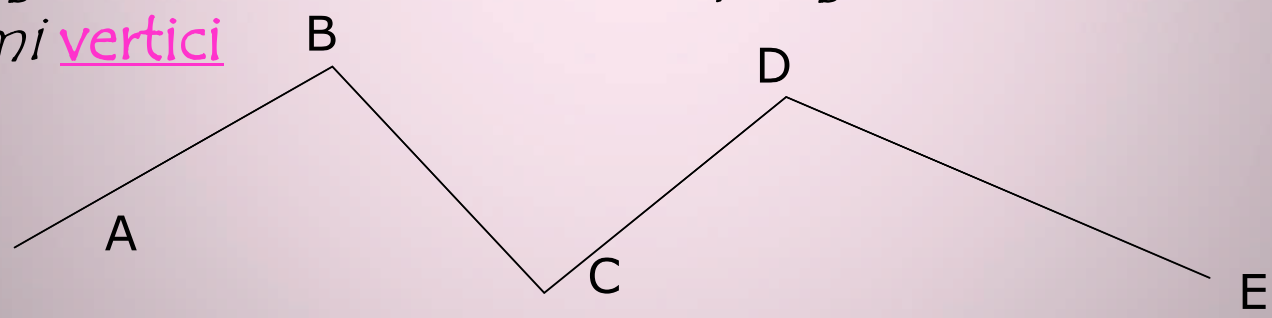
ANGOLI OPPOSTI AL VERTICE: SE I LATI DELL'UNO SONO I PROLUNGAMENTI DELL'ALTRO



Ilary

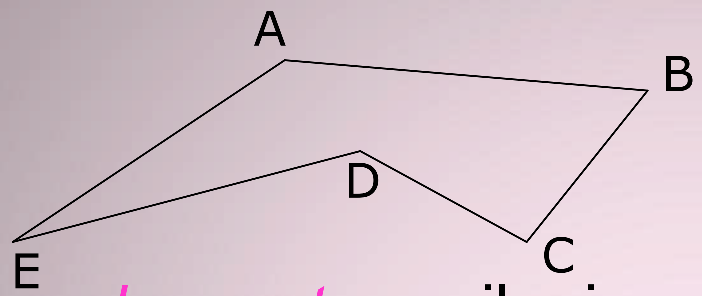
poligonale

- Si chiama poligonale la figura formata da una successione ordinata di un numero finito di segmenti, tali che il primo è consecutivo ma non adiacente al secondo, il secondo è consecutivo ma non adiacente al terzo e così via.
- Tali segmenti si dicono lati della poligonale e i loro estremi vertici

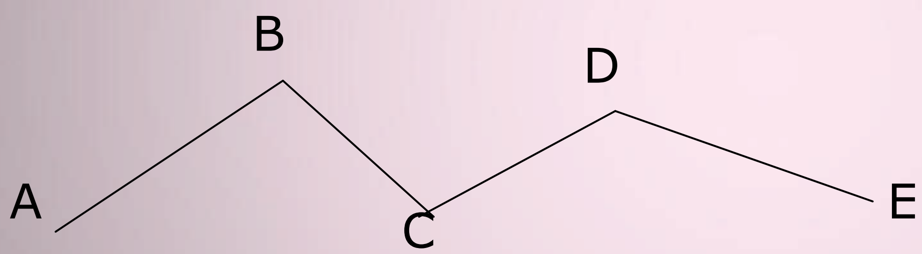


Ilary

- *Poligonale chiusa*: se il primo estremo del primo segmento coincide con il secondo estremo dell'ultimo segmento.



- *Poligonale aperta*: se il primo estremo del primo segmento è diverso dal secondo estremo dell'ultimo segmento.

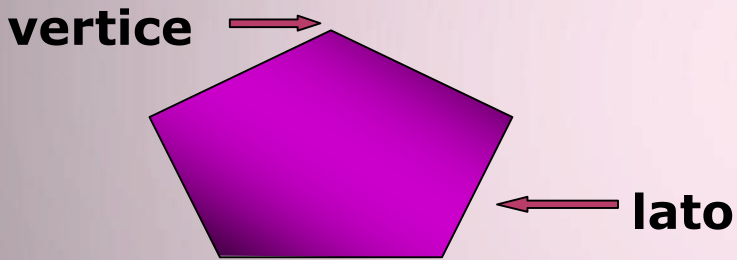


- *Poligonale intrecciata*: se due lati non consecutivi hanno un punto in comune.

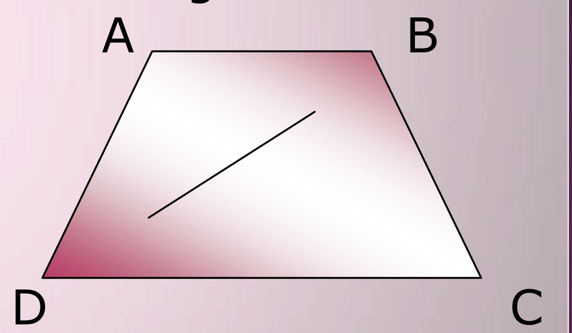
POLIGONO

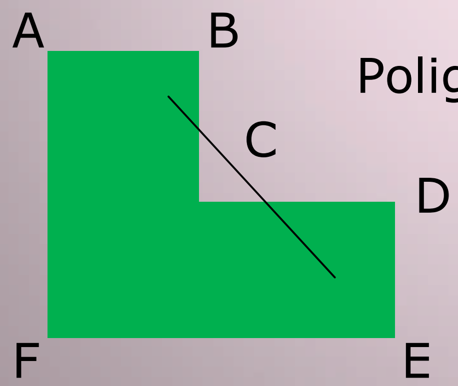
- Il poligono: è la regione di piano formata da una poligonale e dai punti interni alla poligonale.

I vertici e i lati della poligonale se chiamano vertici e lati del poligono



Poligono convesso





Poligono concavo

Ilary

UNITA' 2

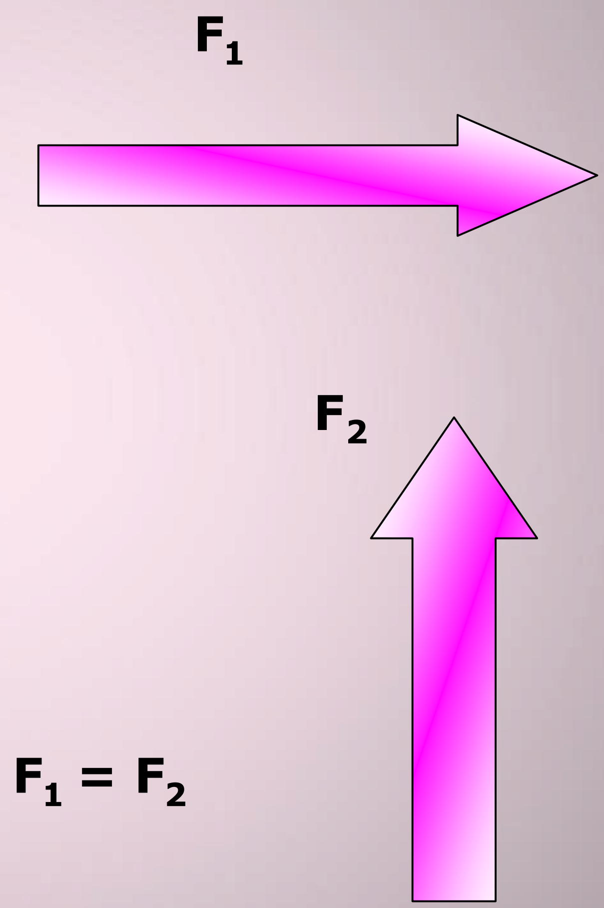
La congruenza

Ilary

Ilary

IL CONCETTO DI CONGRUENZA COME PRIMITIVO

- due figure geometriche diremo congruenti quando è possibile immaginare, con un movimento che non altera la forma né la dimensione delle figure, sovrapporre le due figure punto a punto.



Ilary

PRIMO ASSIOMA DI CONGRUENZA

La relazione di congruenza fra le figure del piano gode delle seguenti proprietà

- Proprietà riflessiva: ogni figura è congruente a se stessa; $F_1=F_1$
- Proprietà simmetrica : se la figura F1 è congruente alla figura F2, allora la figura F2 è congruente alla figura F1;

  F1=F2 allora F2=F1
- Proprietà transitiva: se F1 è congruente alla figura F2 e la figura F2 è congruente alla figura F3, allora F1 è congruente alla figura F3

  F1=F2 e F2=F3 allora F1=F3

Ilary

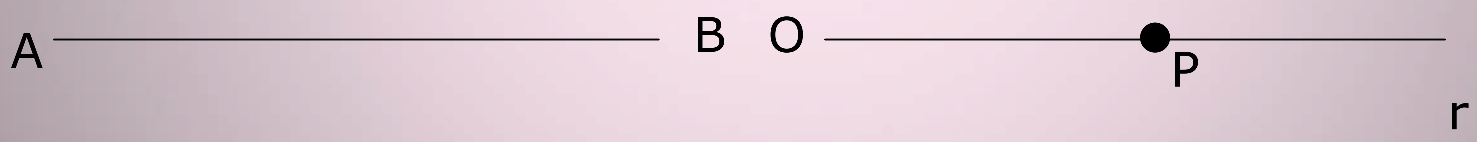
SECONDO ASSIOMA DI CONGRUENZA

- Tutti i punti sono congruenti fra loro;
- Tutte le rette sono congruenti tra loro;
- Tutte le semirette sono congruenti tra loro;
- Tutti i piani sono congruenti tra loro;
- Tutti i semipiani sono congruenti tra loro.

Ilary

TERZO ASSIOMA DI CONGRUENZA

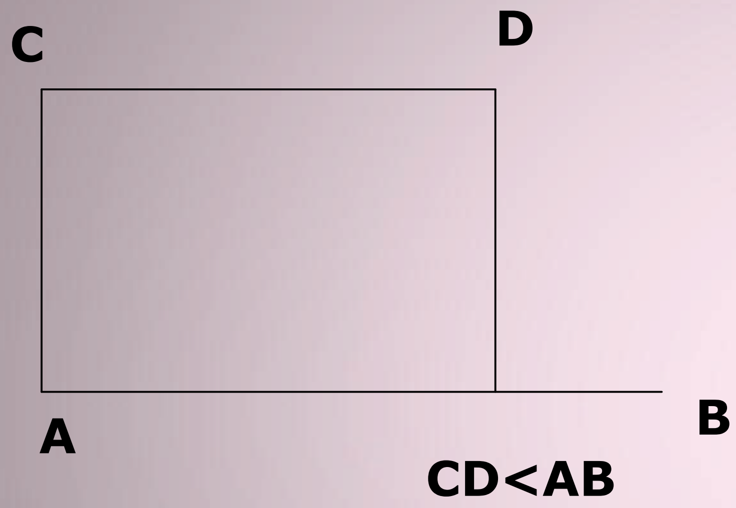
- Dato un segmento AB e una semiretta di origine O, esiste un unico punto P. sulla semiretta, tale che AB sia segmento a OP.



$AB \approx OP$

Ilary

CONFRONTO TRA SEGMENTI

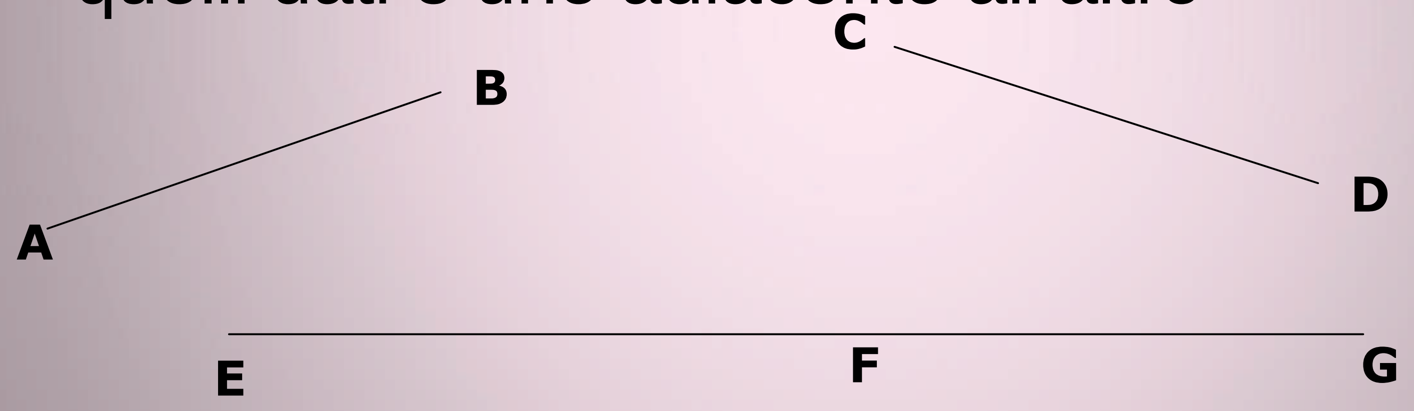


Dati due segmenti se, sovrapponendo il primo segmento al secondo facendo coincidere un estremo, l'altro estremo è interno al secondo segmento allora il primo è minore del secondo; se è esterno è maggiore, se coincidono sono congruenti.

Ilary

SOMMA DI SEGMENTI

Dati due segmenti la loro somma è il segmento che si ottiene considerando due segmenti rispettivamente congruenti a quelli dati e uno adiacente all’altro

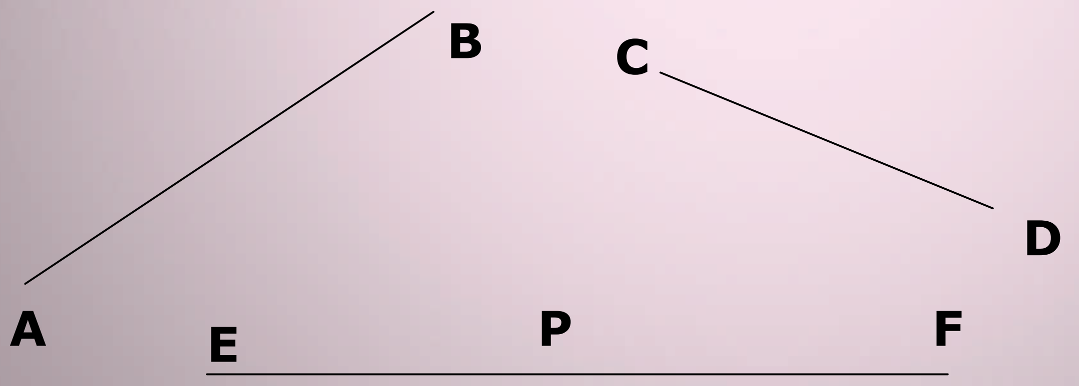


$AB \approx EF$ e $CD \approx FG$ allora $AB + CD = EG$

DIFFERENZA TRA SEGMENTI

Diciamo tra differenza di due segmenti AB e CD, AB>CD, il segmento che, addizionando a CD, da come somma AB.

$AB \approx EF$ e $EF \approx CD$ allora $AB-CD=EF$



Ilary

MULTIPLO DI UN SEGMENTO

Un segmento AB si dice multiplo di CD secondo il numero naturale n >1, se è congruente alla somma di n segmenti congruenti a CD. In simboli si scrive AB ≈ n CD

Se n=3 e CD è: C D

Allora AB è: A B

O se AB è multiplo di CD secondo n>1, si può dire simmetricamente,
Che CD è sottomultiplo di AB secondo n e si scrive CD≈1/n AB

Ilary

ASSIOMA DI CONGRUENZA SUI SEGMENTI

- Somma e differenza di segmenti congruenti sono congruenti

- Esiste, ed è unico, il sottomultiplo di un segmento qualunque numero naturale diverso da zero.

Ilary

PUNTO MEDIO

Dato un segmento AB, si dice punto medio M di AB il punto che lo divide in due parti congruenti.

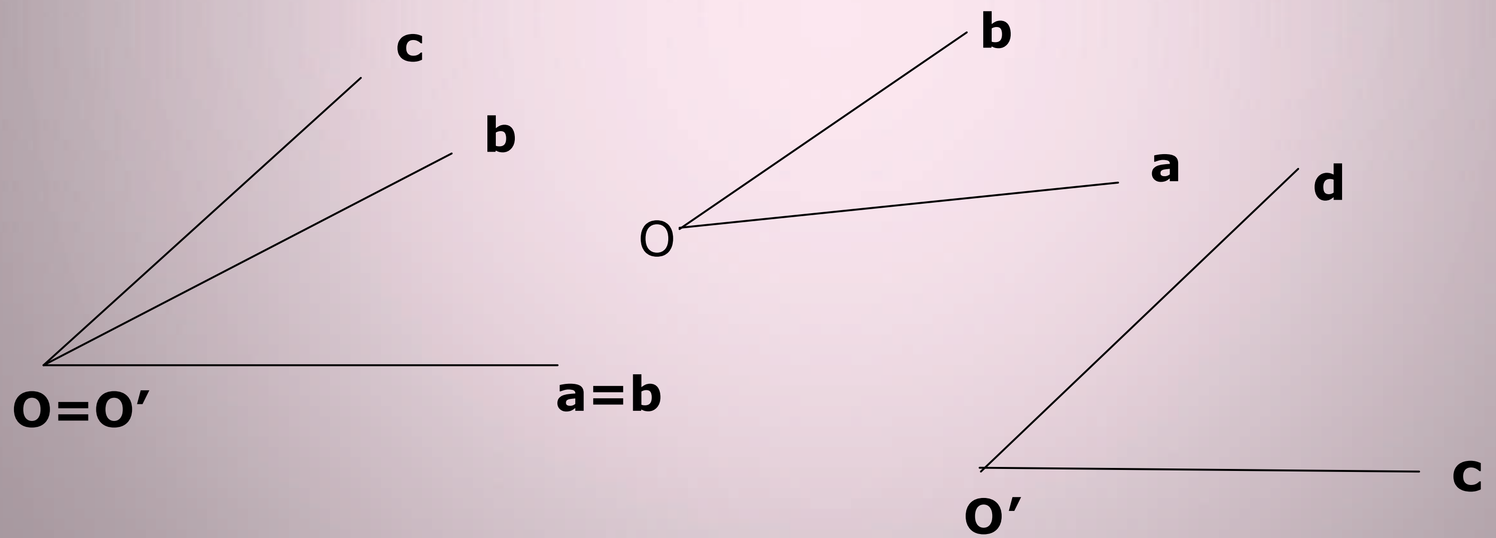
A **M** **B**

AB/2=AM o MB

Ilary

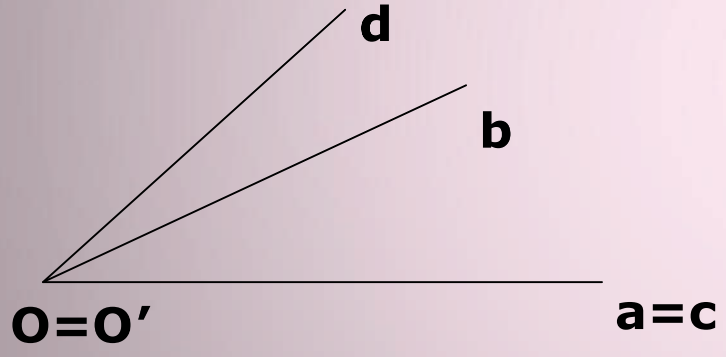
CONFRONTO TRA ANGOLI

Dati due angoli aOb e cO’d, confrontare i due angoli significa sovrapporre i due angoli in modo da far coincidere un lato e gli altri due lati cadere dalla stessa parte.

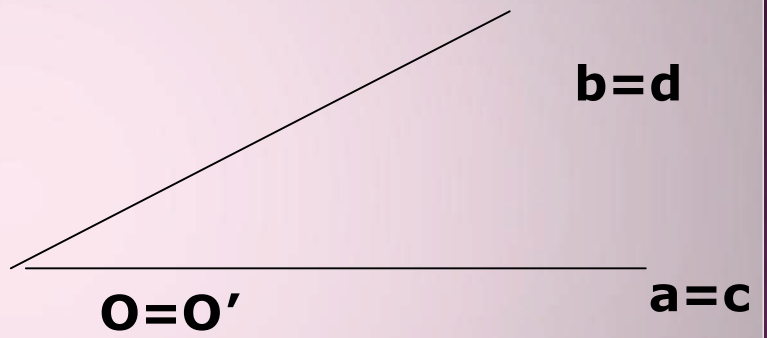


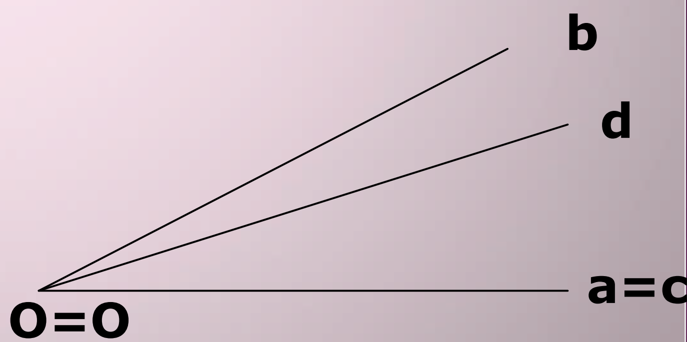
Ilary

Il confronto tra angoli si può allora definire in base alla posizione in cui cade la semiretta d rispetto all'angolo aOb. Possono verificarsi tre casi:



aOb<cOd



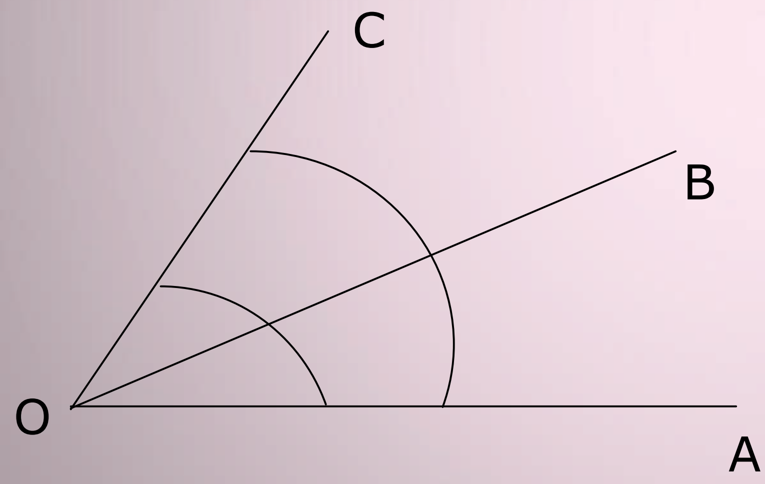


Ilary

aOb>cOd

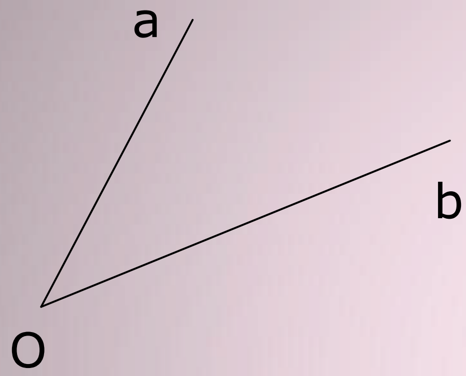
SOMMA DI ANGOLI

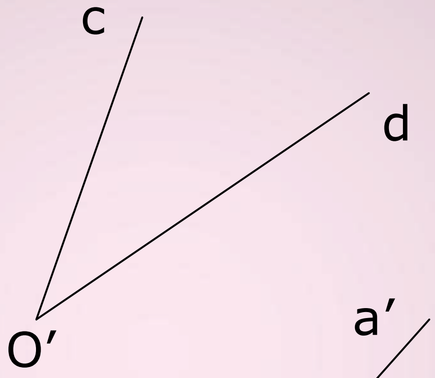
La somma di due angoli consecutivi aOb e bOc è l'angolo aOc.

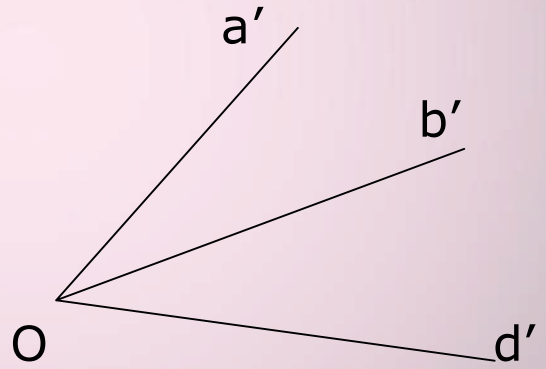


aOb+bOc=aOc

•DICIAMO SOMMA DI DUE ANGOLI, L'ANGOLO SOMMA DI DUE ANGOLI RISPETTIVAMENTE CONGRUENTI A QUELLI DATI E CONSECUTIVI TRA LORO.





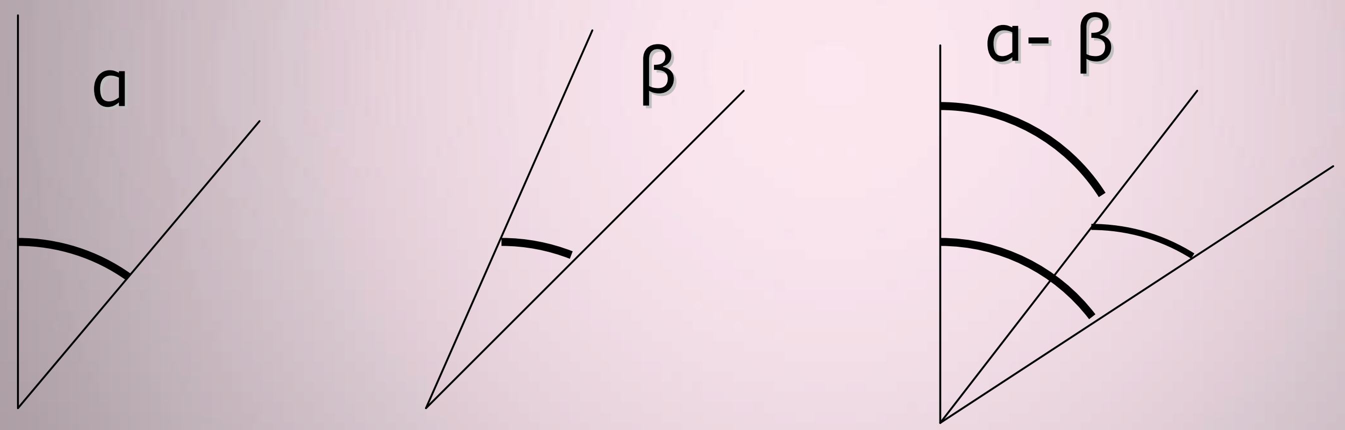


aOb+cO'd = aOd'

Ilary

DIFFERENZA TRA ANGOLI

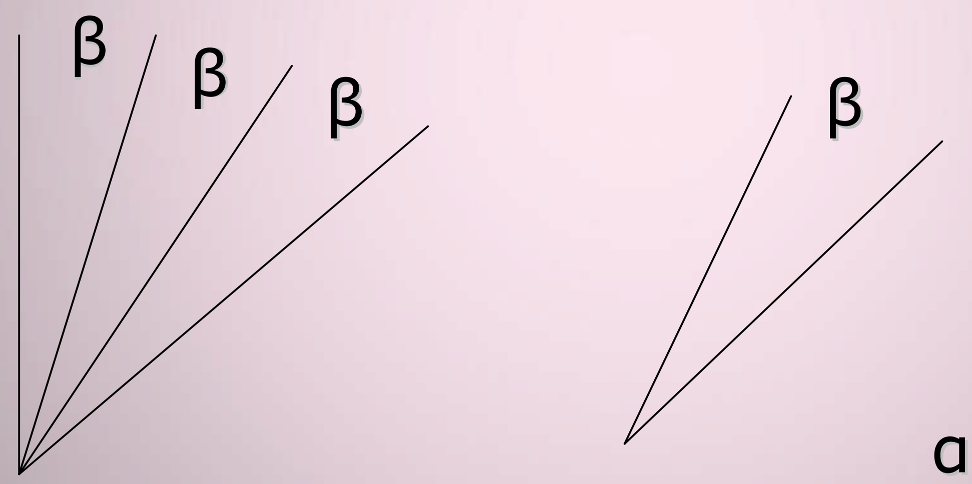
Diciamo differenza tra due angoli α e β, in cui α> β, l'angolo che, addizionato a β, dà come somma α.



Ilary

MULTIPLO DI UN ANGOLO

Un angolo α si dice multiplo di un angolo β secondo il numero naturale n>1 se è la somma di n angoli congruenti a β. In tal caso scriveremo α S n β.

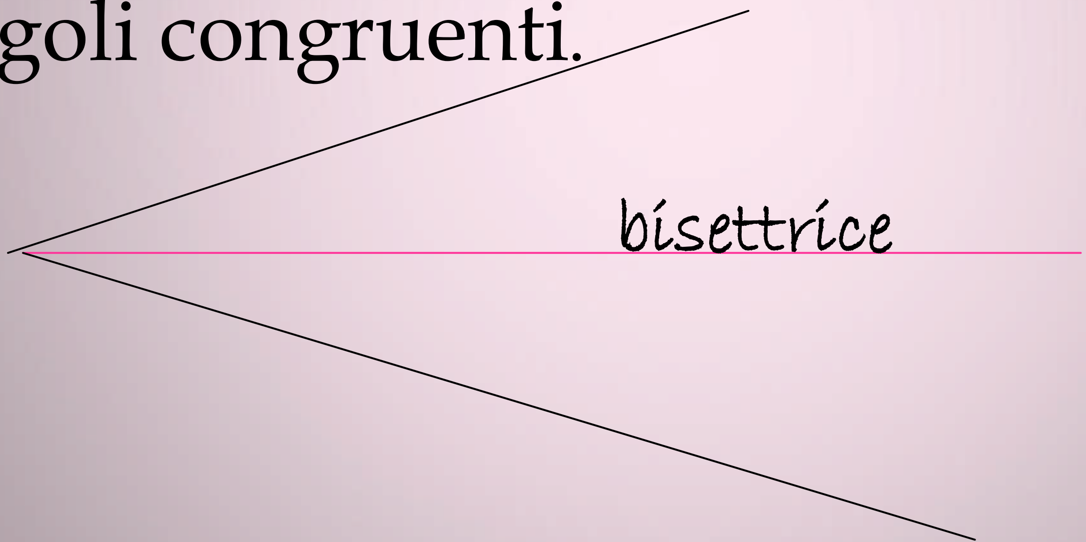


$\alpha = 3\beta$

Ilary

BISETTRICE

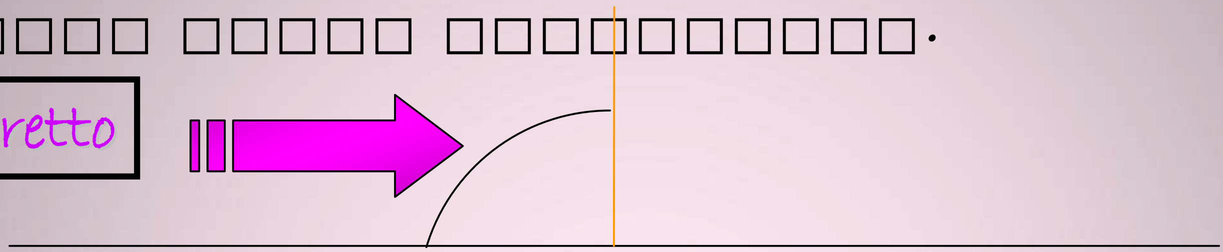
Si dice bisettrice di un angolo la semiretta, avente origine nel vertice dell’angolo, che lo divide in due angoli congruenti.

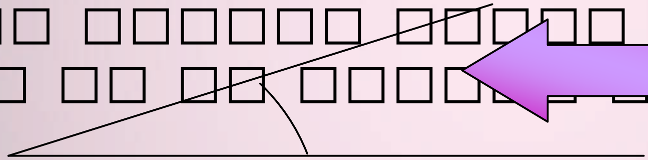


Ilary

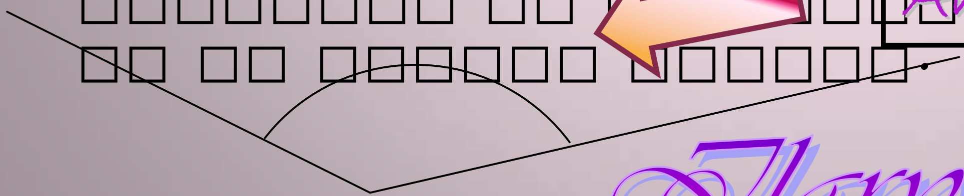
ANGOLI RETTI, ACUTI, OTTUSI

Angolo retto





Angolo acuto

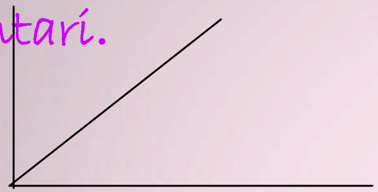


Angolo ottuso

Ilary

ANOGLI COMPLEMENTARI, SUPPLEMENTARI, ESPLEMENTARI

- Due angoli la cui somma è un angolo retto si dicono complementari.



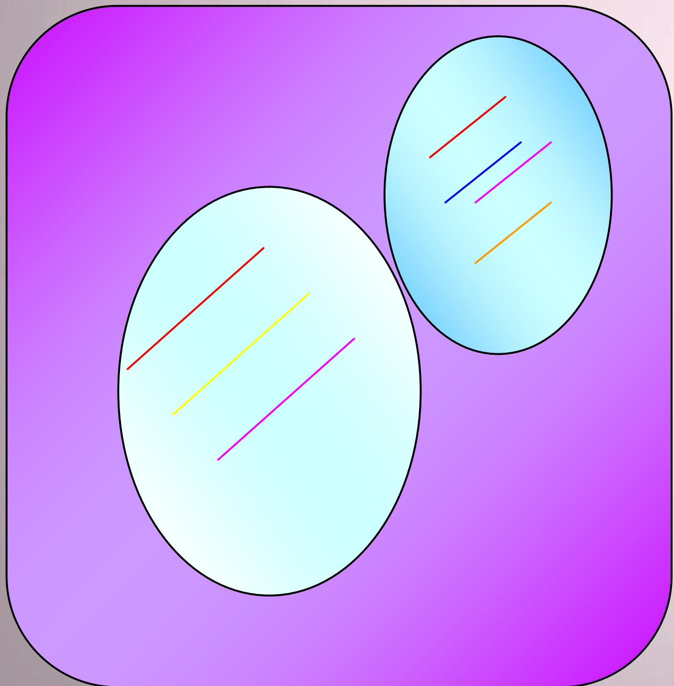
- Due angoli la cui somma è un angolo piatto si dicono supplementari.

- Due angoli la cui somma è un angolo giro si dicono esplementari

Ilary

LUNGHEZZA DI UN SEGMENTO

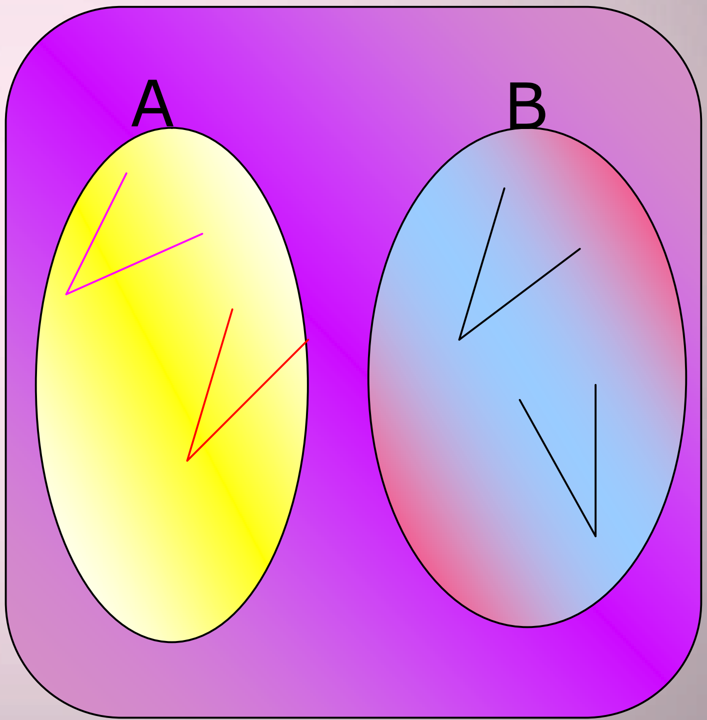
- La lunghezza di un segmento è il nome che viene dato all'insieme (classe di equivalenza) dei segmenti congruenti al segmento dato.



Ilary

AMPIEZZA DI UN ANGOLO

- L'ampiezza di un angolo è il nome che viene dato all'insieme (classe di equivalenza) degli angoli congruenti all'angolo dato.



TEOREMA 2.1

- Due angoli complementari di angoli congruenti sono congruenti
- IPOTESI $\alpha + \beta = \pi/2$ $\alpha^1 + \beta^1 = \pi/2$ $\beta = \beta^1$
- TESI $\alpha = \alpha^1$

DIMOSTRAZIONE

$\alpha+\beta= \pi/2$ per ipotesi quindi $\alpha=\pi/2 -\beta$

$\alpha+\beta= \pi/2$ per ipotesi quindi $\alpha=\pi/2 -\beta$

Ma $\beta= \beta$ per ipotesi quindi $a = a$ perché differenza di angoli congruenti C . V . D

Ilary

TEOREMA 2.2

- Due angoli supplementare di angoli congruenti sono congruenti
- IPOTESI $\alpha + \beta = \pi/2$ $\alpha^1 + \beta^1 = \pi$ $\beta = \beta^1$
- TESI $\alpha = \alpha^1$

DIMOSTRAZIONE

$\alpha + \beta = \pi$ per ipotesi quindi $\alpha = \pi - \beta$

$\alpha + \beta = \pi$ per ipotesi quindi $\alpha = \pi - \beta$

Ma $\beta = \beta$ per ipotesi quindi $a = a$ perché differenza di angoli congruenti C . V . D

Ilary

MISURA DI UN SEGMENTO

- Dato un segmento **ab** e scelto un segmento come unità di misura,al segmento **ab** si può associare un unico numero non negativo “k” detto misura del segmento AB. Tale che: **AB = k CD**
- Segmenti congruenti hanno la stessa misura
- Se **AB<A B** allora la misura di **AB** è minore della misura di **A B**
- La misura della somma di due segmenti è la somma delle misure dei segmenti.

Ilary

MISURA DI UN ANGOLO

- Dato un angolo α e scelto un angolo β come unità di misura, all'angolo α si può associare un unico numero non negativo "*k*" detto **misura dell'angolo** α, tale che:
- $\alpha = k\beta$;
- Angoli congruenti hanno la stessa misura; poi se $\alpha < \alpha'$, allora la misura di α è minore della misura di α';
- La misura di due angoli è la somma delle misure degli angoli.

Ilary

UNITA' 3

Congruenza tra triangoli

Ilary

- Triangoli (terminologia)
- Classificazione dei triangoli in base ai lati
- Classificazione dei triangolo in base agli angoli
- Termini insiemistici
- Segmenti notevoli
- Criteri di congruenza
- 1° teorema di congruenza
- 2° teorema di congruenza
- 3° teorema di congruenza
- Proprietà degli angoli isosceli

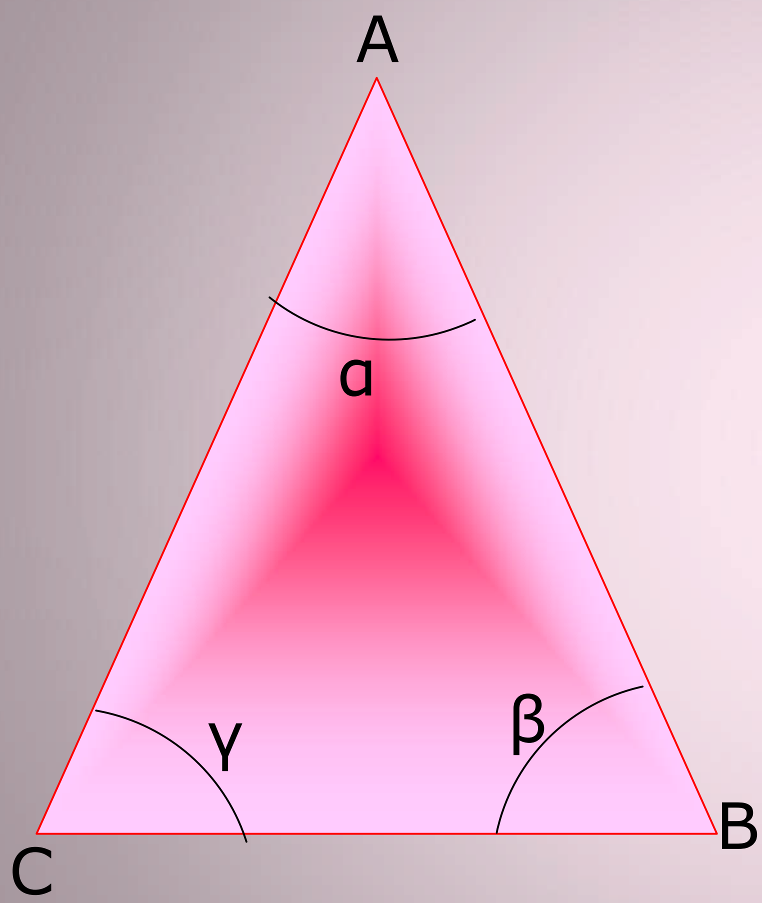
Ilary

TRIANGOLI TERMINOLOGIA

- Il triangolo è una figura geometrica, in particolare un poligono che ha 3 lati (segmenti segnati colla lettera minuscola), 3 vertici (punti segnati colle lettere maiuscole), e tre angoli interni (angoli segnati colle lettere dell'alfabeto greco)

Ilary

TRIANGOLI



VERTICI: A, B, C

LATI: a, b, c

ANGOLI: α, β, γ

LATI OPPOSTI AI VERTICI: a è opposto ad A
b è opposto ad B
c è opposto ad C

LATI OPPOSTI AGLI ANGOLI:

a è opposto a γ

b è opposto a α

c è opposto a β

ANGOLI ADICENTI AI LATI:

α è adiacente ad a e c

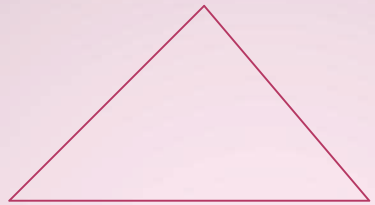
β è adiacente ad a e b

γ è adiacente a b e c

Ilary

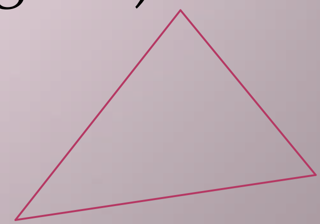
CLASSIFICAZIONE DEI TRIANGOLI IN BASE AI LATI

•Triangolo EQUILATERO (con 3 lati uguali)



•Triangolo ISOSCELE (con 2 lati uguali)

•Triangolo SCALENO (con i lati 2 a 2 disuguali)



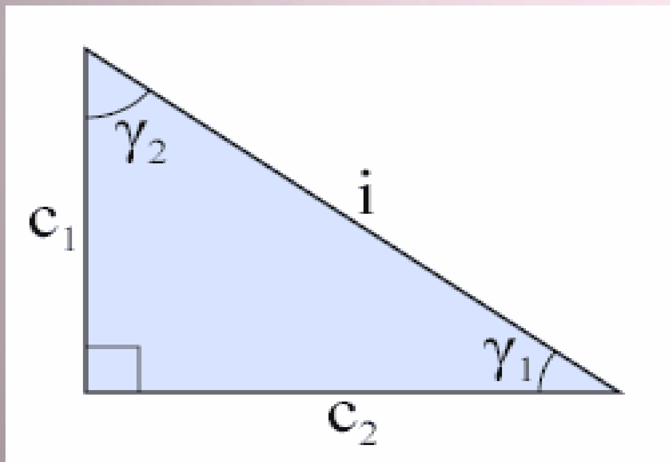
Ilary

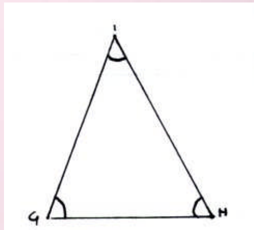
CLASSIFICAZIONE DEI TRINAGOLI IN BASE AGLI ANGOLI

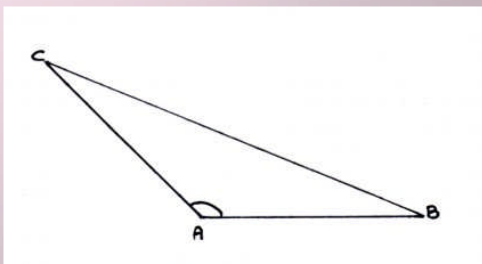
La classificazione dei triangoli in base agli angoli prevede tre casi. Un triangolo si dice:

- Acutangolo se ha tutti gli angoli acuti
- Rettangolo se ha un angolo retto
- Ottusangolo se ha un angolo ottuso

In un triangolo rettangolo il lato opposto all’angolo retto si chiama ipotenusa del triangolo,
Mentre gli altri due lati si chiamano cateti

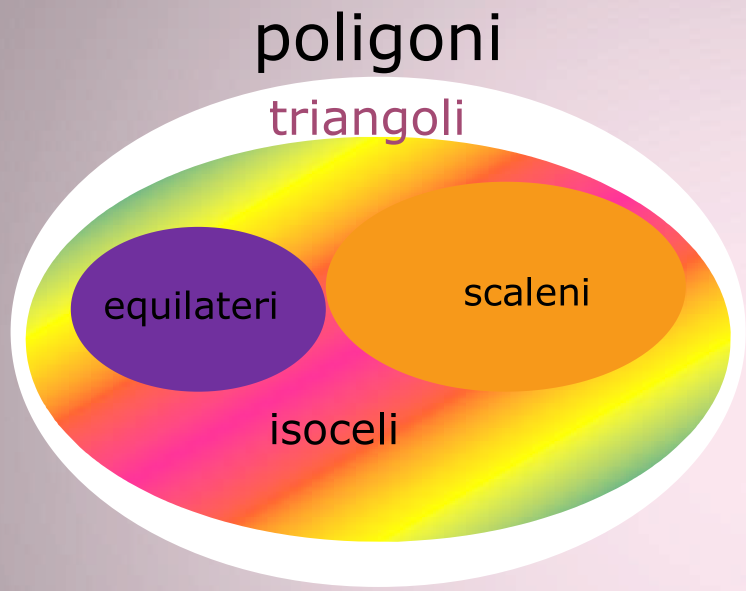


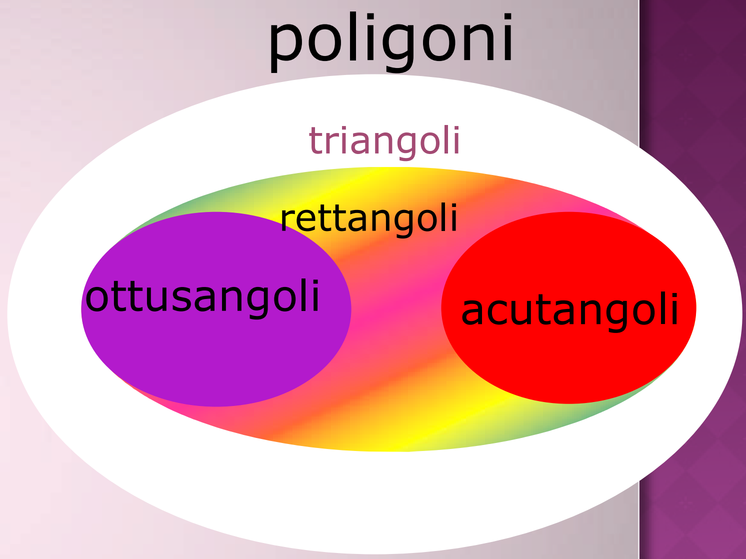




Ilary

TERMINI INSIEMISTICI





Ilary

SEGMENTI NOTEVOLI

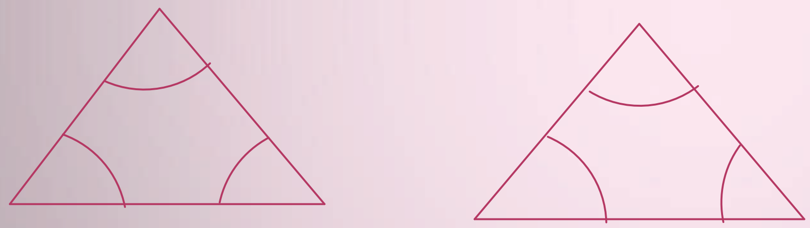
In un triangolo si possono tracciare alcune corde di particolare importanza a cui si danno dei nomi speciali. Precisamente:

- Si chiama BISETTRICE di un angolo di un triangolo il segmento costituito dai punti della bisettrice di quell' angolo che appartengono al triangolo;
- Si chiama MEDIANA il segmento che congiunge un vertice del triangolo col punto medio del lato opposto;
- Si chiama ALTEZZA relativa a un lato il segmento che, partendo dal vertice opposto a quel lato, incontra il lato stesso o il suo prolungamento formando due angoli retti.

Ilary

CRITERI DI CONGRUENZA

- **Definizione:** due triangoli si dicono congruenti quando hanno i tre lati congruenti e tre angoli congruenti



AB ≈ A' B'

Ilary

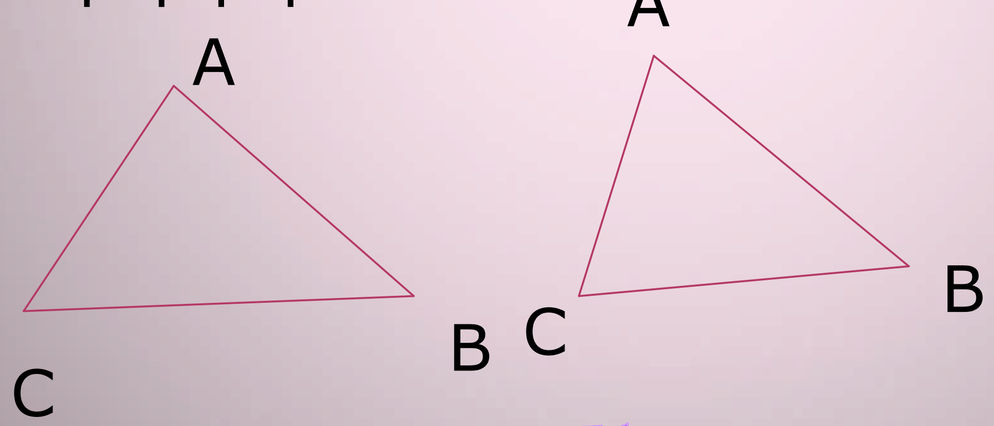
1° TEOREMA DI CONGRUENZA

- **1° Teorema:** se due triangoli hanno due lati congruenti e anche l'angolo compreso tra essi allora i due angoli sono congruenti.

IPOTESI: AC≅A′C′ AB≅A′B′ e α≅α′

TESI: ABC è congruente ad A′B′C′

CB≅C′B′ β≅β γ≅γ



Ilary

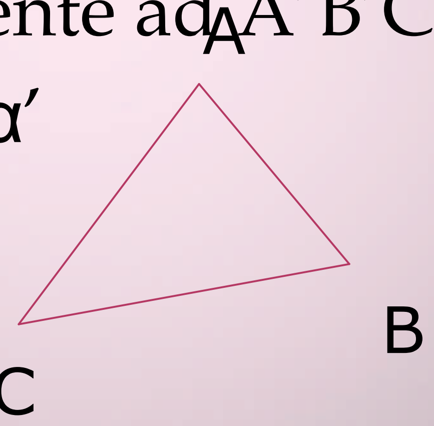
2° TEOREMA DI CONGRUENZA

- **2° Teorema:** Due triangoli sono congruenti quando hanno un lato congruente e due angoli adiacenti al lato congruenti

IPOTESI: CB≅C′B′ γ≅γ′ β≅β′

TESI: ABC è congruente ad A′B′C′

(AC≅A′C′ AB≅A′B′ α≅α′



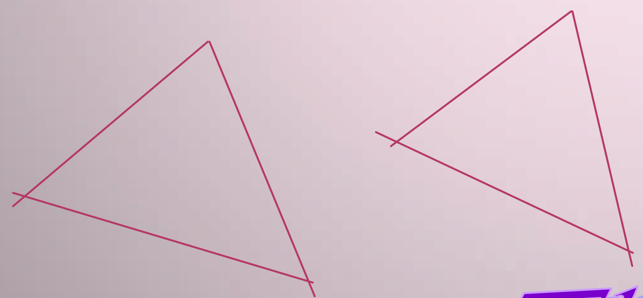
Ilary

3° TEOREMA DI CONGREUNZA

- **3° Teorema:** due triangoli sono congruenti se hanno tutti e tre i lati congruenti (e quindi anche gli angoli)

  IPOTESI: AB≅A′B′ AC≅A′C′ BC≅B′C′

  TESI: ABC è congruente ad A′B′C′
- (α≅α′ β≅β′ γ≅γ′) Ma se gli angoli sono congruenti i triangoli non lo sono.



Ilary

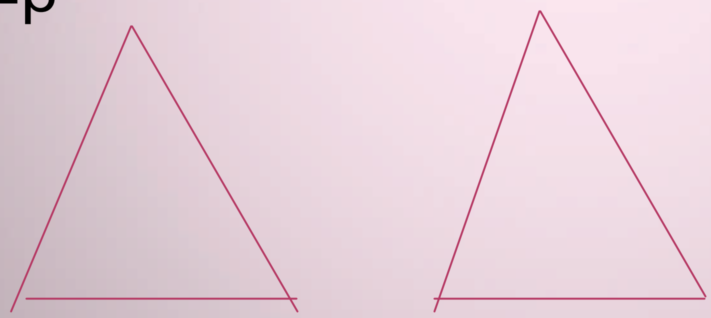
PROPRIETA' DEGLI ANGOLI ISOSCELI

- Teorema:in un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti

Ipotesi 1: AB≅AC

Ipotesi 2: In un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è anche mediana e altezza

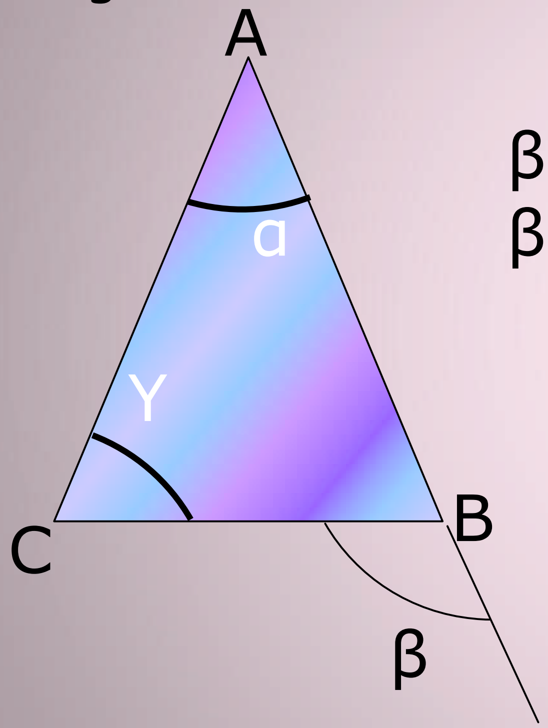
Tesi: $\gamma \cong \beta$



Ilary

DISUGUAGLIANZE NEI TRIANGOLI

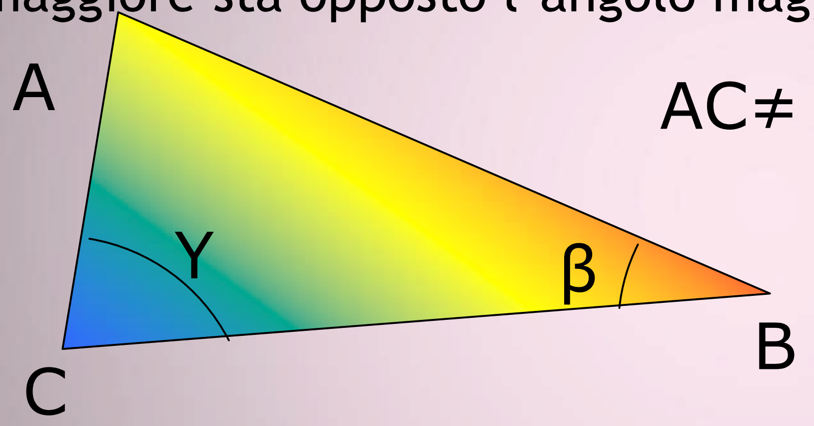
1. teorema sull'angolo esterno: in qualsiasi triangolo, ogni angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti



β > α
β > Y

RELAZIONI TRA LATI E ANGOLI DI UN TRIANGOLO

- Se in un triangolo due lati non sono congruenti, allora anche gli angoli opposti non sono congruenti e al lato maggiore sta opposto l'angolo maggiore.



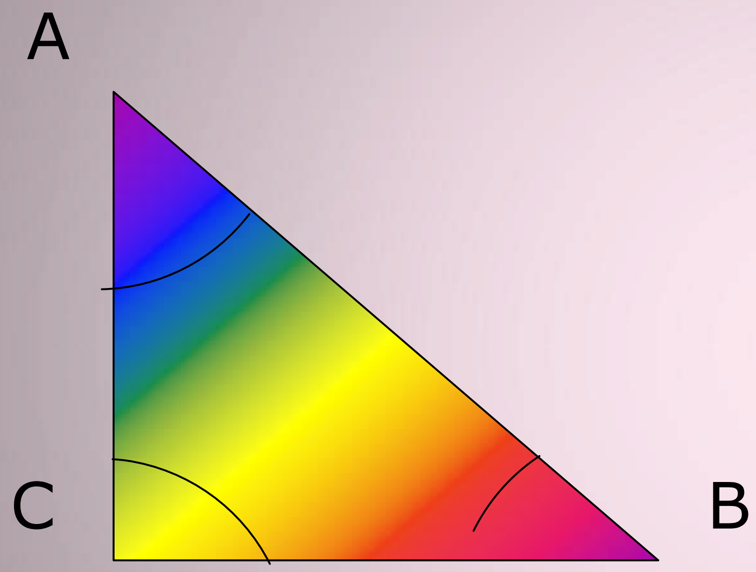
AC≠ AB → Y≠β

Ipotesi: AC≠ AB

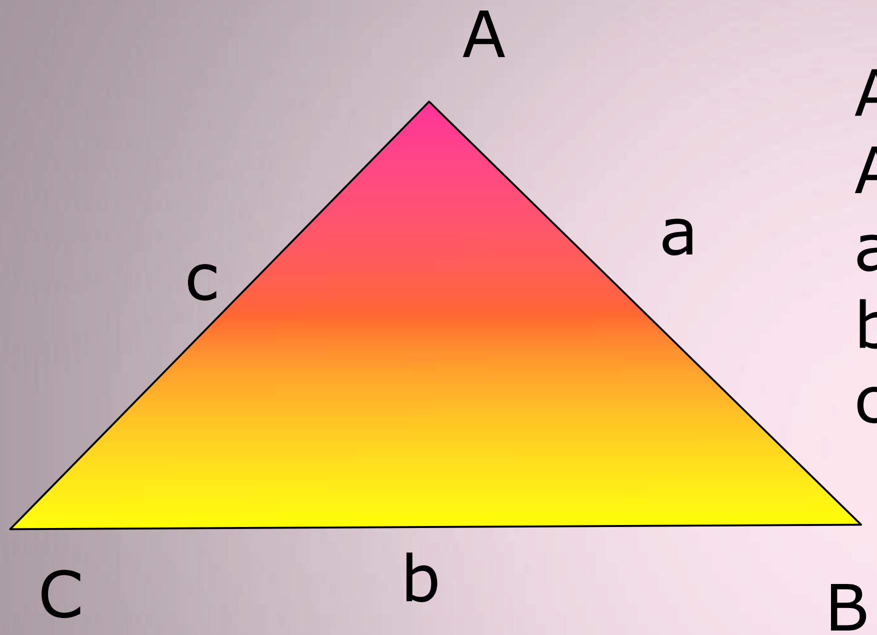
Tesi: Y≠β

Ilary

Corollorario: in ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore di ciascuno dei due cateti



- Teorema disuguaglianze triangoli: in ogni triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.



$AB < AC + CB$

$AB > CB - AC$

$a < b + c$ $\qquad$ $a > b - c$

$b < a + c$ $\qquad$ $b > b - c$

$c < a + b$ $\qquad$ $c > b - a$

Ilary

UNITA' 4

RETTE PERPENDICOLARI E PARALLELE

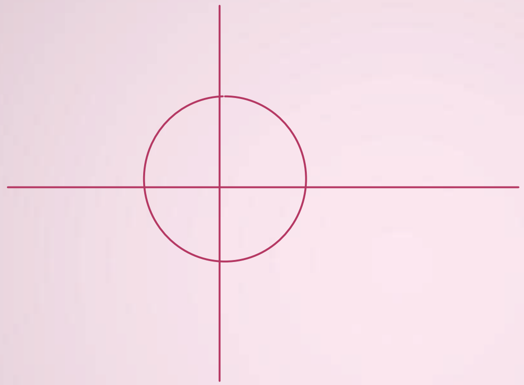
Ilary

INDICE

Ilary

DEFINIZIONI

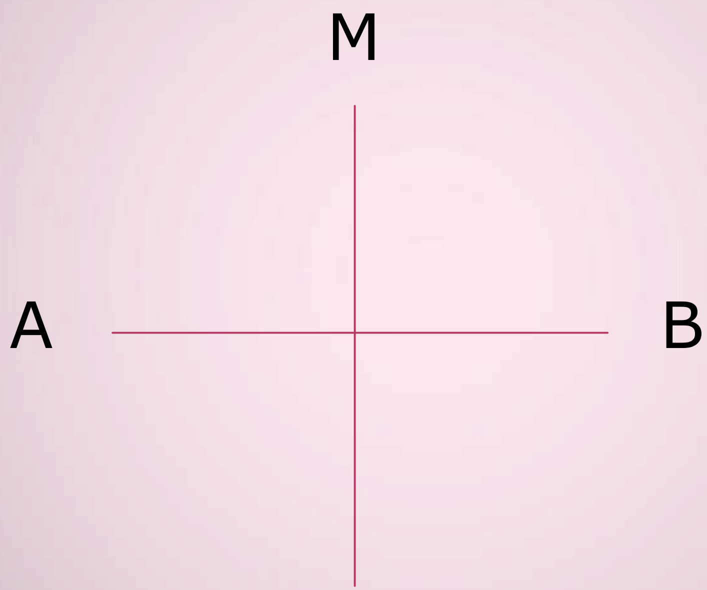
- Rette perpendicolari: due rette incidenti si dicono perpendicolare se, incontrandosi, formano quattro angoli retti



- Due rette di dicono parallele se non hanno punti di intersezione oppure se coincidono

Ilary

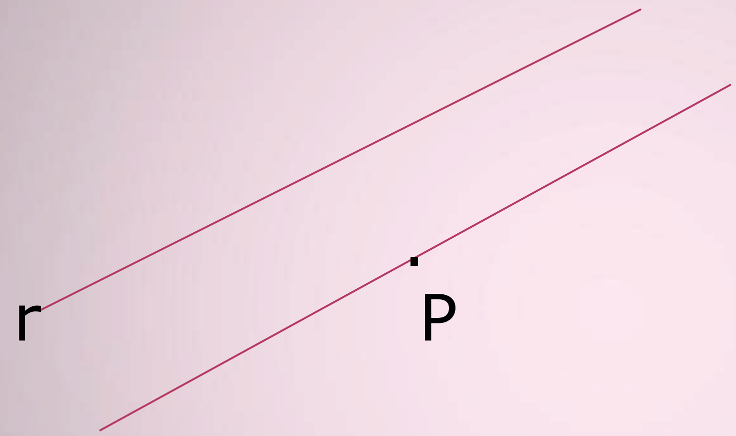
- Asse di un segmento: dato un segmento AB, si chiama asse di AB la retta passante per il punto medio di AB e perpendicolare ad AB



Ilary

ASSIOMA DELLA PARALLELA (O QUINTO POSTULATO DI EUCLIDE)

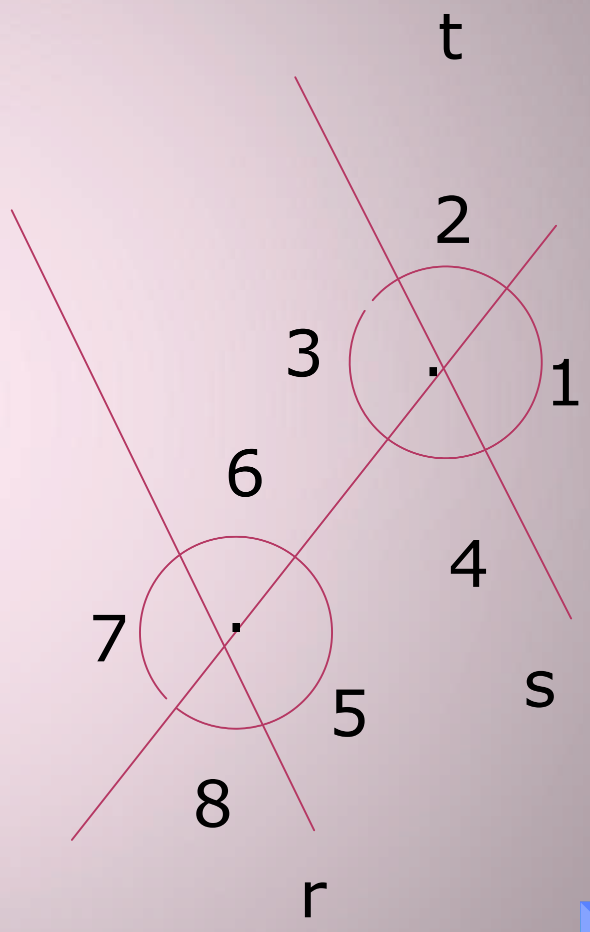
- Per un punto P non appartenente a una retta r si può tracciare un'unica retta parallela a r



Ilary

ANGOLI FORMATI DA DUE RETTE TAGLIATE DA UNA TRASVERSALE

Coppie di angoli alterni interni
(3;5) e (4;6)
Coppie di angoli alterni esterni
(1;7) e (2;8)
Coppie di angoli corrispondenti
(1;5) (2;6) (3;7) e (4;8)
Coppie di angoli coniugati interni
(3;6) e (4;5)
Coppie di angoli coniugati esterni
(1;8) e (2;7)



Ilary

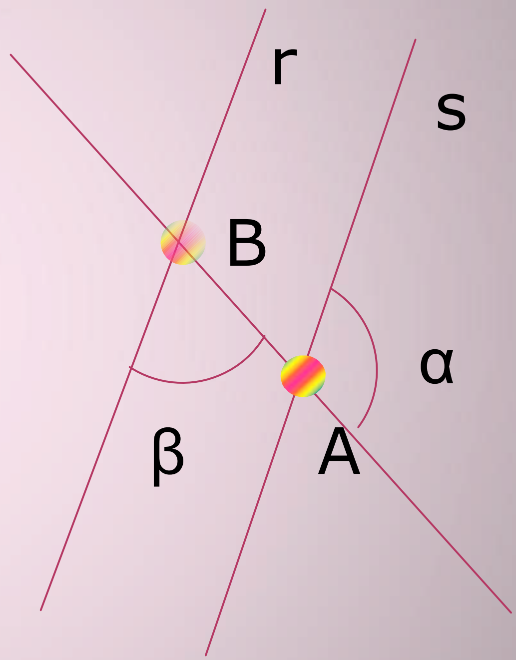
TEOREMA RETTE PARALLELE TAGLIATE DA UNA TRASVERSALE

Due rette, tagliate da una trasversale, sono parallele se e solo se:

1. formano una coppia di angoli alterni congruenti

-. formano una coppia di angoli corrispondenti congruenti;

*. formano una coppia di angoli coniugati supplementari



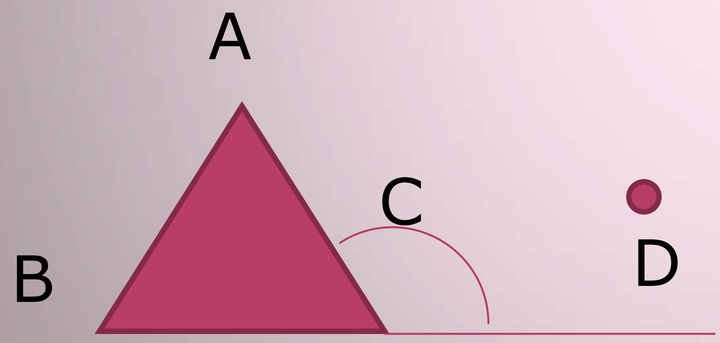
Ilary

PROPRIETA' DEGLI ANGOLI NEI POLIGONI

- Teorema dell' angolo esterno:

Ciascuno angolo esterno di un triangolo è congruente alla somma degli angoli interni a esso non adiacenti.

Ipotesi: ABC è un triangolo, ACD è l'angolo esterno di vertice C del triangolo ABC
Tesi: ACD = α+β



Ilary

SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI DI UN TRIANGOLO

- La somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo è 180°. Si tratta di un teorema che afferma che la somma delle ampiezze degli angoli di un triangoli è un’invariante, cioè qualcosa che non cambia mai, indipendentemente dal tipo di triangolo, dalla sua forma, dalle lunghezze dei lati ecc.

Ilary

COROLLARI

- In un triangolo rettangolo gli angoli acuti sono complementari
- In un triangolo equilatero ciascuno dei tre interni ha ampiezza uguale a 60°
- Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due angoli, allora hanno congruente anche il terzo angolo.

Ilary

DISTANZA FRA DUE RETTE PARALLELE

- I segmenti di perpendicolare condotti da due punti di una retta r a una retta s, parallela a r, sono congruenti.

Ilary

SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI DI UN POLIGONO CONVESSO

- La somma delle ampiezze degli angoli interni a un poligono convesso di n lati è:

$$(n-2) \times 180°$$

Ilary

Somma degli angoli esterni di un poligono convesso

- La somma delle ampiezze degli angoli esterni di un poligono convesso è sempre uguale a 360°

Ilary

Anno scolastico
2009/2010

FINE

ISIS LUIGI EINAUDI
DALMINE (BG)

Ilary